



L'os d'Ishango

**Circonscription Lille 1 Marcq
Décembre 2020**

**LA RESOLUTION DE PROBLEMES
LA METHODE SINGAPOUR**

« La résolution de problème est au centre de l'activité mathématique des élèves. »



Plan de la formation

Partie 1: retour sur les évaluations nationales

Partie 2: Vous allez résoudre des problèmes

Partie 3: La méthode de Singapour

Partie 4: quand toute une école s'y met

Partie 5: Autoformation

Partie 5: Correction et échanges

Partie 1

Evaluations nationales



Résultats aux évaluations nationales et internationales

- Un problème extrait des évaluations

Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zeds.

Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds.

Julien a 4 zeds.

Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ?

A. 1,06 zeds

B. 1,16 zeds

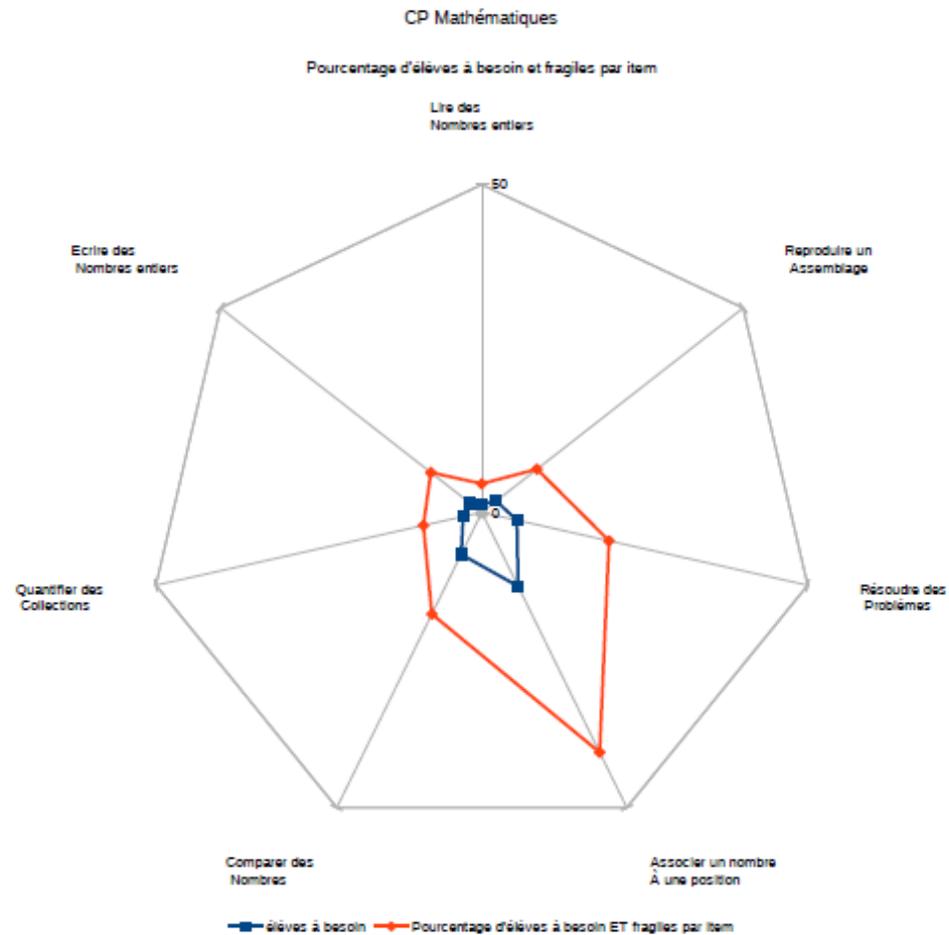
C. 5,06 zeds

D. 5,16 zeds

Pour ce problème, les élèves français ont obtenu le plus faible taux de réussite des pays de l'Union Européenne participants (TIMSS 2015). avec un score de 42 %, alors que le tiers des autres l'Union Européenne ont obtenu des scores de réussite moyens entre 62 % et 70 % et qu'un pays comme Singapour a même atteint 79 %.

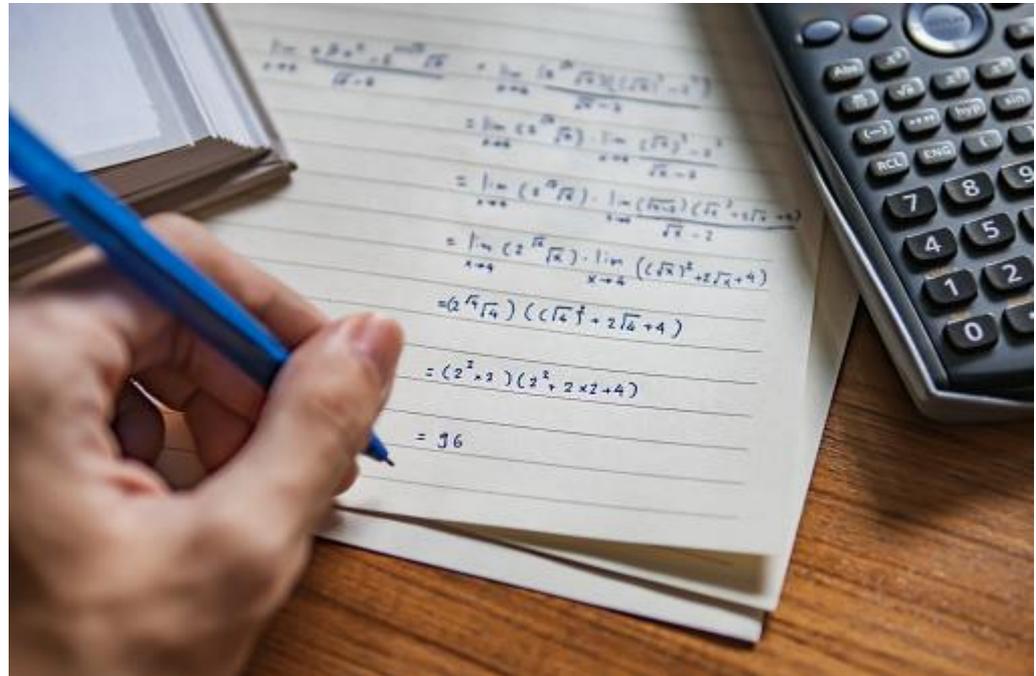
Résultats des évaluations CP 2020

- comparer des nombres
Résolution de problèmes
Associer un nombre à une position



Résolution de problèmes

Munissez vous d'une feuille
et d'un crayon

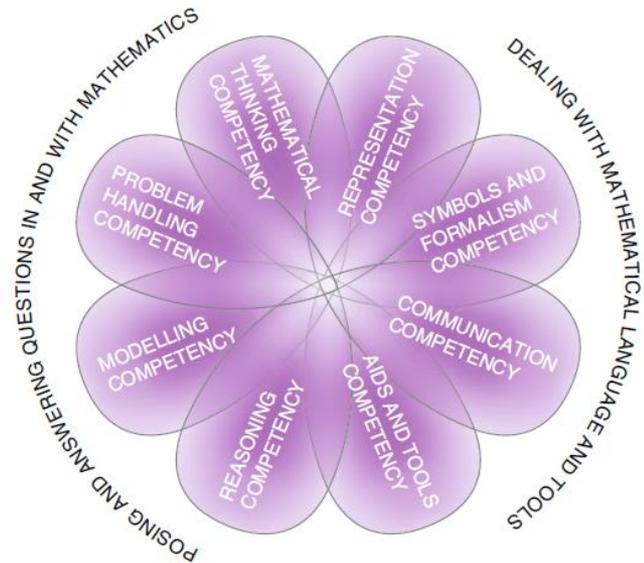


6 compétences mathématiques

1999 : La fleur des compétences (Niss)



- Chercher
- Modéliser
- Représenter
- Calculer
- Reasonner
- Communiquer



Quels problèmes proposer ?

« J'ai 25 animaux, des poules et des lapins. Il y a en tout 68 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ? »



$$x + y = 25$$

$$2x + 4y = 68$$

Quels problèmes proposer ?

Au prix de l'abandon temporaire d'une contrainte (ou du moins de sa transformation de contrainte en but à atteindre), le problème peut être formulé ainsi :

Choisir 25 animaux, parmi des poules et des lapins. Obtenir un nombre de pattes le plus proche possible de 68.

Quels problèmes proposer ?

Choisis 15 véhicules,
parmi des voitures et
des motos.

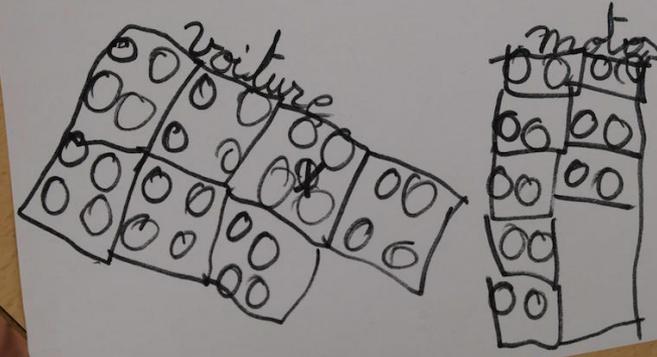
Tu dois obtenir un
nombre total de roues le
plus proche possible de 42.



Quels problèmes proposer ?


 $\Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta$
 $\frac{b}{\Delta} + \frac{b}{\Delta} + \frac{b}{\Delta} + \frac{b}{\Delta} + \frac{b}{\Delta} + \frac{b}{\Delta} + \frac{b}{\Delta}$
 $\frac{b}{\Delta} + \frac{b}{\Delta} = 44 \text{ Roues.}$
 Il ya 44 Roues.
 Il ya 7 voiture

7 voiture 8 motos.

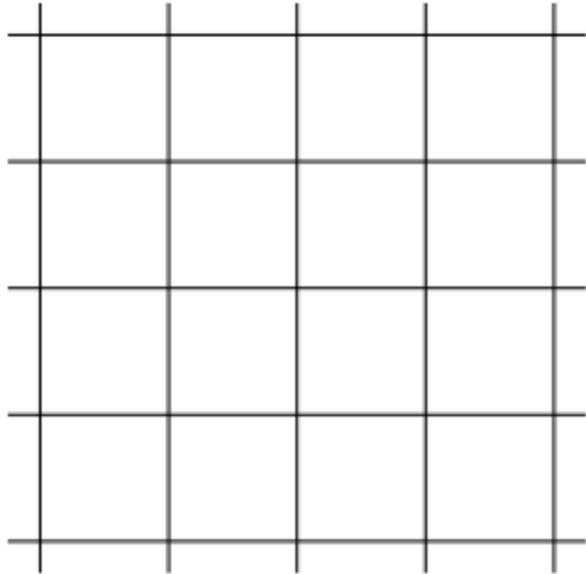


~~11~~ 11 motos / 4 / voiture
 24 roues / 16 roues
 $24 + 16 = 40$

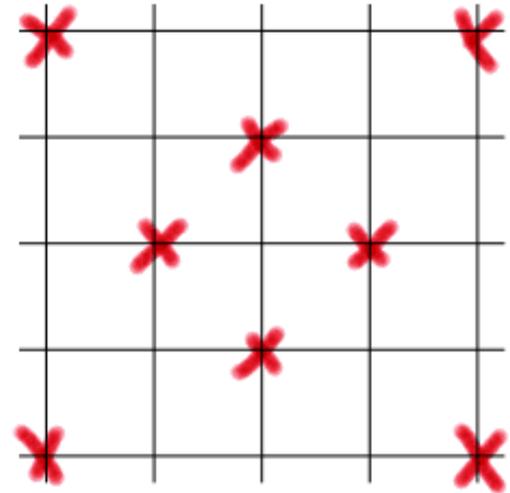
$$\begin{array}{r} 24 \\ +16 \\ \hline 40 \end{array}$$

~~X~~ Il ya 16 moto.
~~X~~ Il ya 7 moto. 44 ~~roues~~ roues
 Il ya 8 voiture.
 Il ya 8 motos et 7 voiture
 $\Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta$
 $\Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta$

Quels problèmes proposer ?



8 points

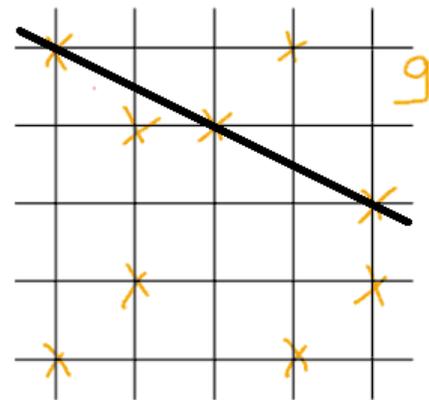
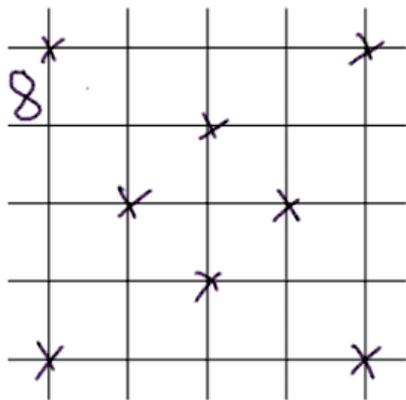
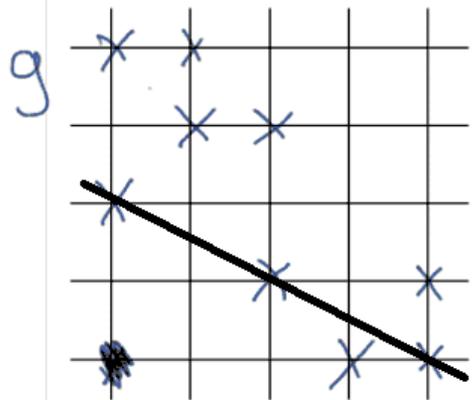
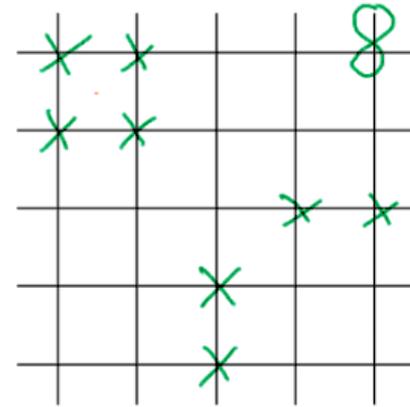
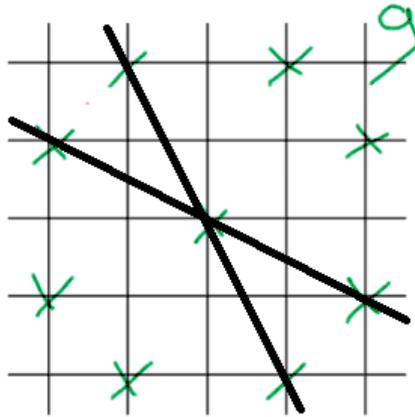
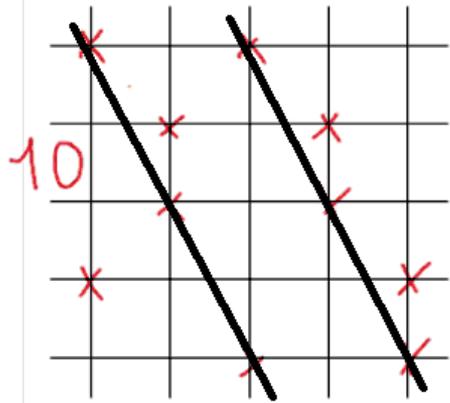


« Place des points sur les intersections de cette grille. »

« Tu ne dois jamais placer trois points alignés. »

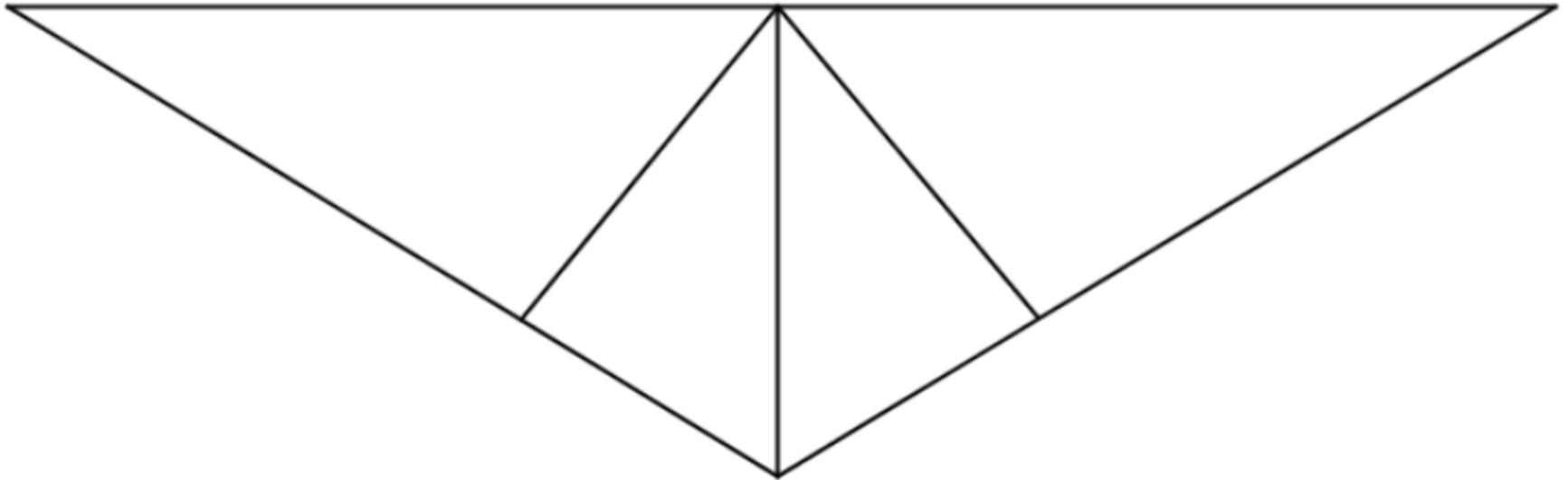
But : « Tu dois placer le plus possible de points sur la grille. »

Quels problèmes proposer ?



Quels problèmes proposer ?

Combien peut-on voir de triangles dans cette figure ?



Enseigner la résolution de problèmes arithmétiques

Quels problèmes proposer ?

Pour chacun de ces problèmes suivants, indiquez ses caractéristiques.

Quels problèmes proposer ?

A) Kevin avait 27 jetons ; il en a donné 12 à Agathe.

Combien de jetons a Kevin maintenant ?

B) Il avait 28 euros. Il a acheté un livre à 12 euros et une trousse à 5 euros.

Combien lui reste-t-il ?

C) Matéo a 20 billes.

Sara en a 10 de plus que lui.

Combien les deux enfants ont-ils de billes en tout ?

D) Dans la salle de cantine de l'école il y a 6 tables pour les élèves.

À chaque table, 10 élèves peuvent s'asseoir pour manger.

Dans cette école, il y a 27 filles et 36 garçons qui mangent à la cantine.

Est-ce que tous les élèves peuvent manger en même temps dans la salle de la cantine ?

Quels problèmes proposer ?

E) Hugo a 36 bonbons. Il en donne les $\frac{3}{4}$ à ses amis.

Combien de bonbons lui reste-t-il ?

F) Fatou a fabriqué 3 colliers avec 27 perles chacun. Combien Fatou a-t-elle utilisé de perles ?

G) Nora prend 24 images. Tom prend 3 fois plus d'images que Nora. Combien d'images ont-ils pris en tout ?

H) Une grenouille fait des sauts d'au plus 9 cm. Elle veut atteindre un moustique situé à 157 cm d'elle. Combien de sauts (au minimum) devra-t-elle effectuer pour atteindre le moustique ?

Les catégories de problèmes

- Les **problèmes basiques** : résolution « automatisée »
- Les **problèmes complexes** : agrégats de problèmes basiques où la construction et la connexion des informations, nécessaires pour la résolution, est à la charge de l'élève
- Les **problèmes atypiques** : ne sont pas des agrégats de problèmes basiques, dont la résolution demande la construction d'une stratégie, à défaut d'une ressemblance que percevrait le sujet avec un problème déjà résolu.

Dans les repères de progressivité

Problèmes du champ additif en une étape ,

Problèmes du champ additif en deux étapes

Problèmes multiplicatifs

Problèmes de partage ou de groupement

Problèmes à deux étapes mixant les opérations

Problèmes à plusieurs étapes

Problèmes relevant de la proportionnalité

Problèmes impliquant des grandeurs

Les compétences travaillées

- ❖ Chercher
- ❖ Modéliser
- ❖ Représenter
- ❖ Reasonner
- ❖ Calculer
- ❖ Communiquer

La compétence « Représenter »

LE JEU DU MESSAGE

Représenter le problème en respectant les règles suivantes :

- Vous ne pouvez pas utiliser de lettre ni de mot
- Vous ne pouvez pas utiliser les opérations , ni les symboles + , - , x ou :
- Vous pouvez utiliser les nombres qui figurent dans le texte du problème
- Vous pouvez dessiner, utiliser « ? » et « → »
- Votre représentation doit permettre à une personne qui n'a pas lu le problème de proposer le ou les calculs pour trouver la réponse.

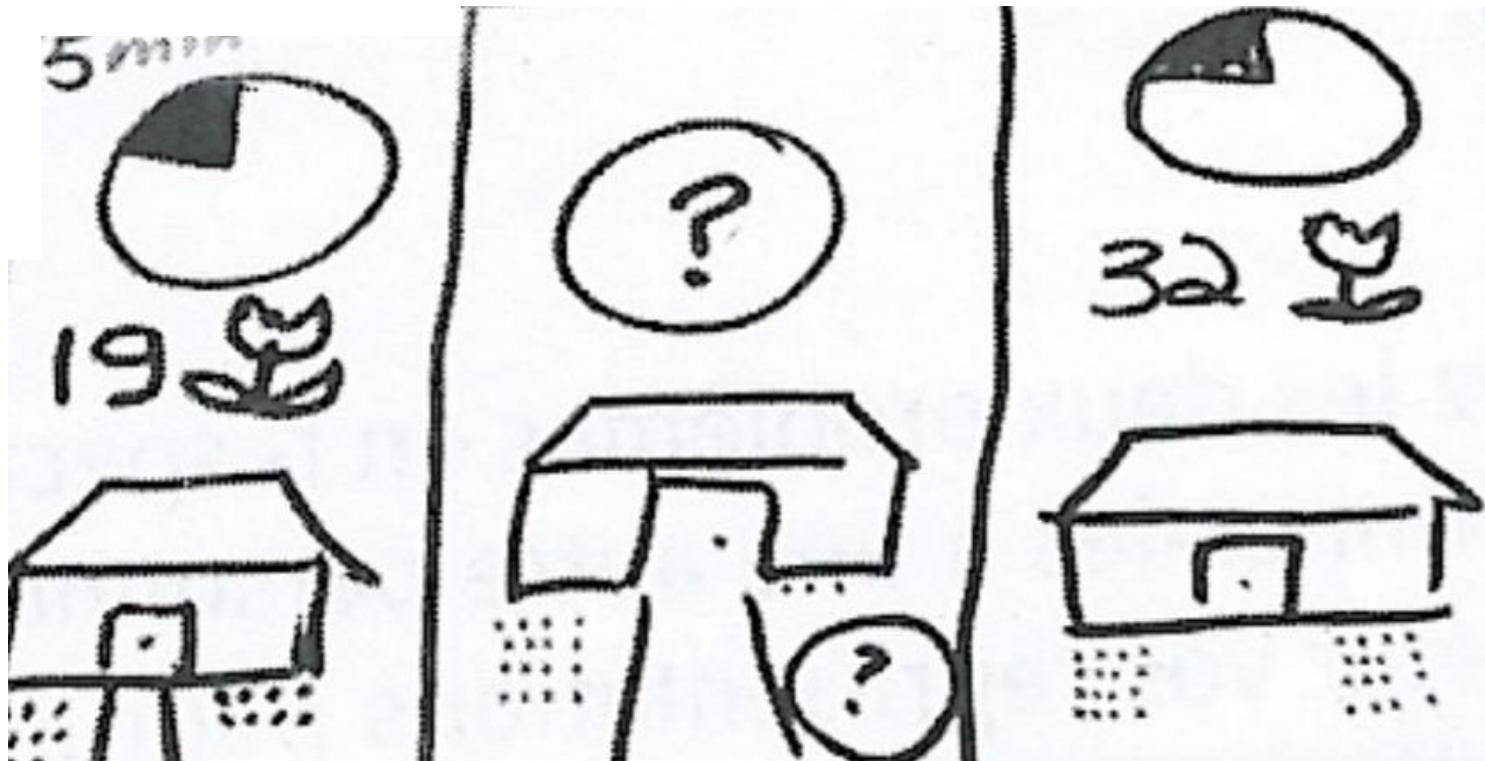
LE JEU DU MESSAGE

Lilou aide sa grand-mère à planter des tulipes dans le jardin. Elles ont prévu de planter 32 tulipes. En 5 minutes, elles ont déjà planté quelques tulipes. Il leur reste encore 19 tulipes à planter.

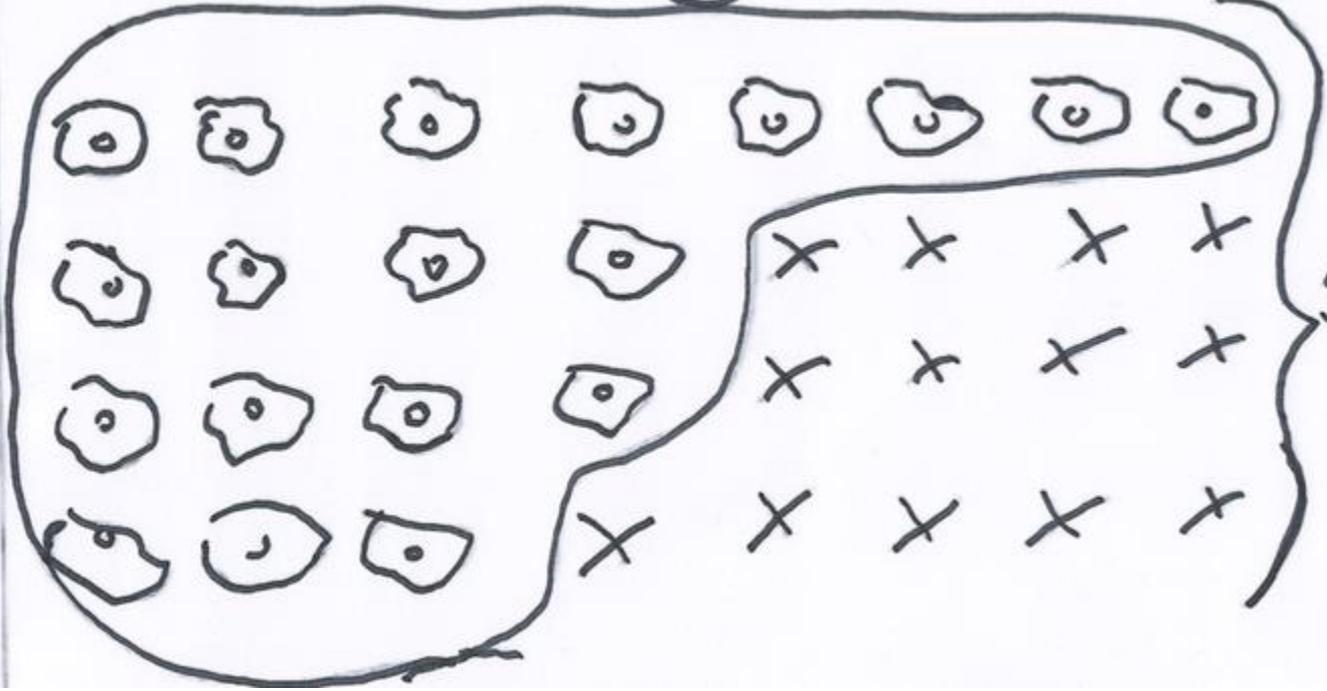
Combien de tulipes ont-elles plantées ?



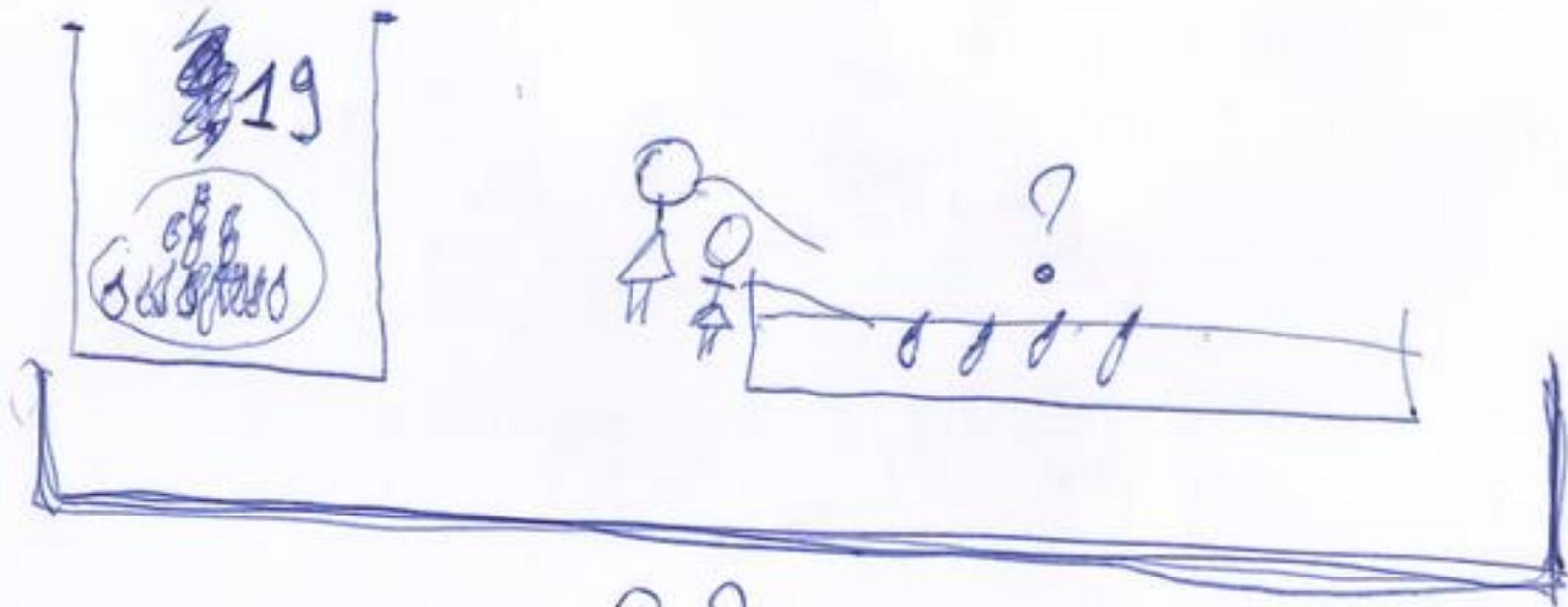
PRODUCTIONS D'ADULTES



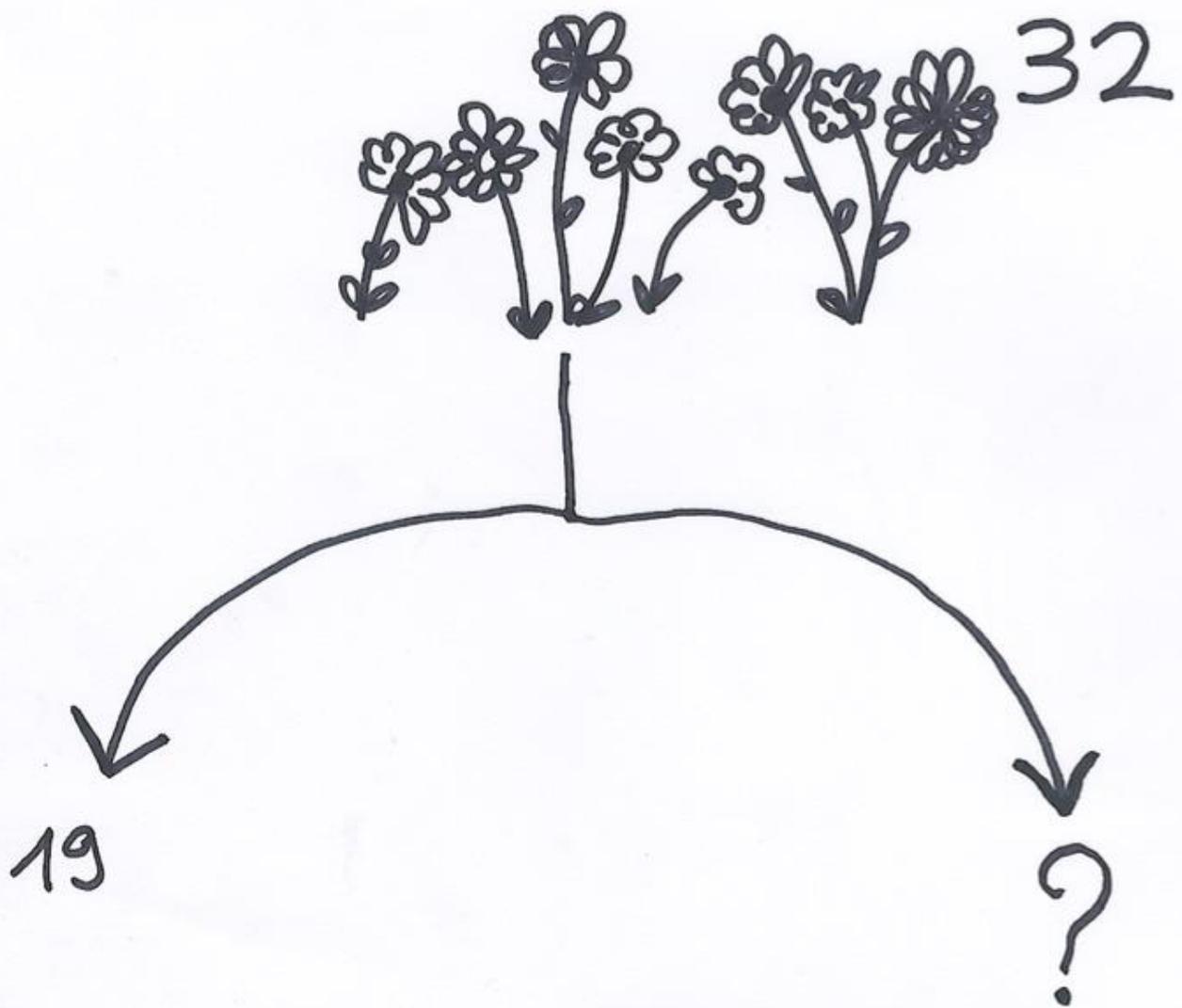
(19)



32



32



LE JEU DU MESSAGE

Dans son coffre aux trésors, la pirate Anne BONNY a 43 pierres précieuses.
Elle a 18 pierres précieuses de moins que son ami Rackham le Rouge.
Combien de pierres précieuses se trouvent dans le coffre de Rackham le Rouge ?

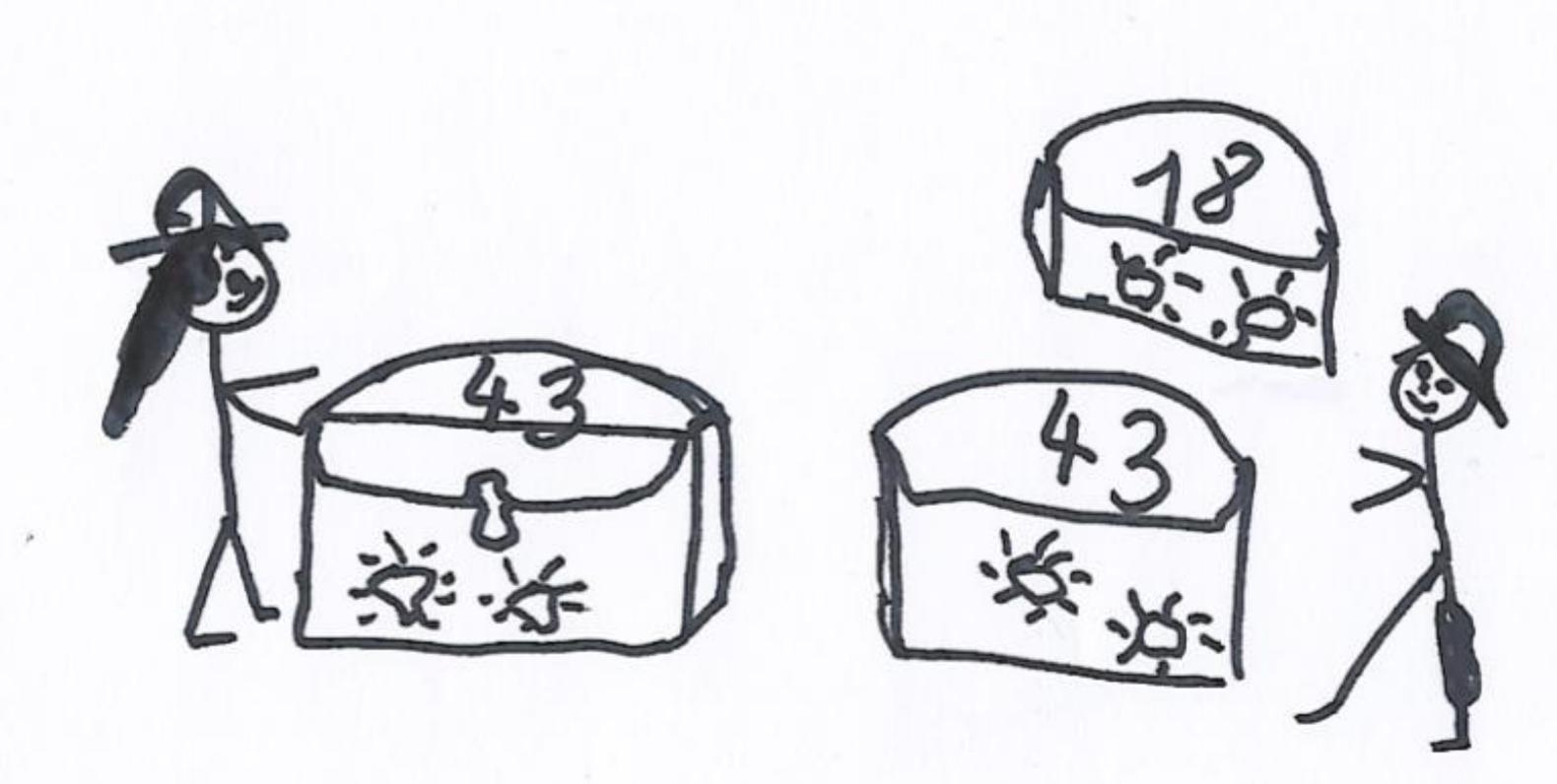


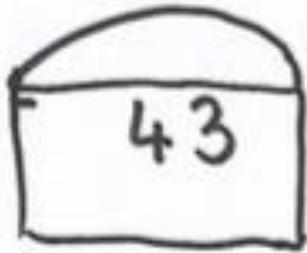
Anne BONNY



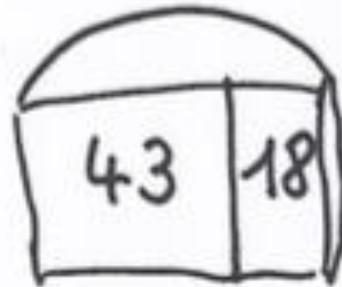
Rackham le Rouge

PRODUCTIONS D'ADULTES





?





Représenter

Modéliser

Une vache pèse 150 kg de plus qu'un chien. Une chèvre pèse 120 kg de moins qu'une vache. Ensemble, les animaux pèsent 390 kg. Combien pèse le chien ?

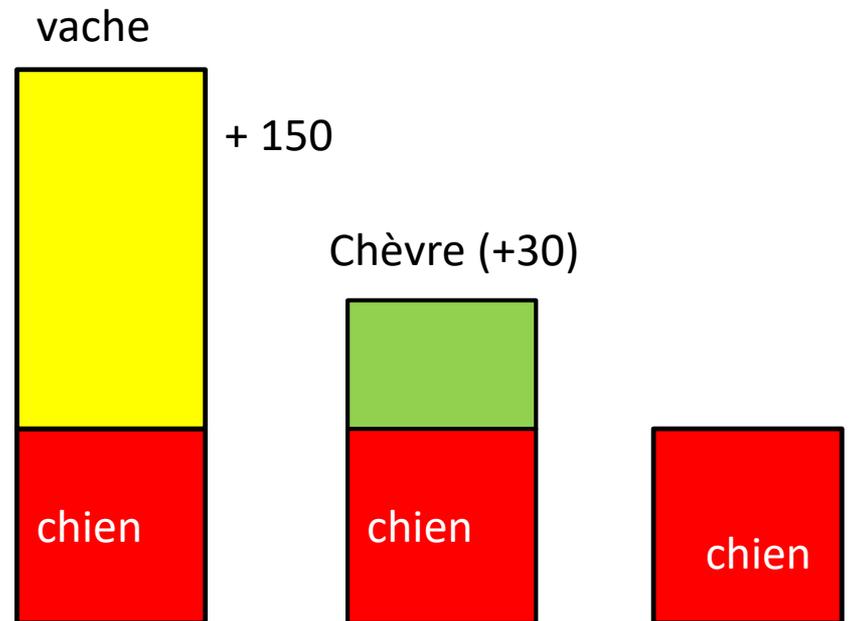
2- Problème à résoudre avec feuille et stylo

Une vache pèse 150 kg de plus qu'un chien. Une chèvre pèse 120 kg de moins qu'une vache. Ensemble, les animaux pèsent 390 kg. Combien pèse le chien ?

2- Analyse

- Quel niveau de classe ?
- Quelles aides pourrait-on proposer aux élèves ?

Une vache pèse 150 kg de plus qu'un chien. Une chèvre pèse 120 kg de moins qu'une vache. Ensemble, les animaux pèsent 390 kg. Combien pèse le chien ?



Une vache pèse 150 kg de plus qu'un chien. Une chèvre pèse 120 kg de moins qu'une vache. Ensemble, les animaux pèsent 390 kg.

Combien pèse le chien ?

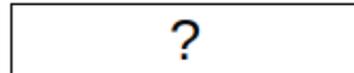
1 vache



2 chèvre



3 chien



Résolution

Posons chien = X

$$X + (X + 150) + (X + (150 - 120)) = 390$$

$$X + X + 150 + X + 30 = 390$$

$$3X + 180 = 390$$

$$3X = 390 - 180$$

$$3x = 210$$

$$X = 210/3$$

$$X = 70$$

Réponse: Le chien pèse 70 kg

Vers la méthode de Singapour



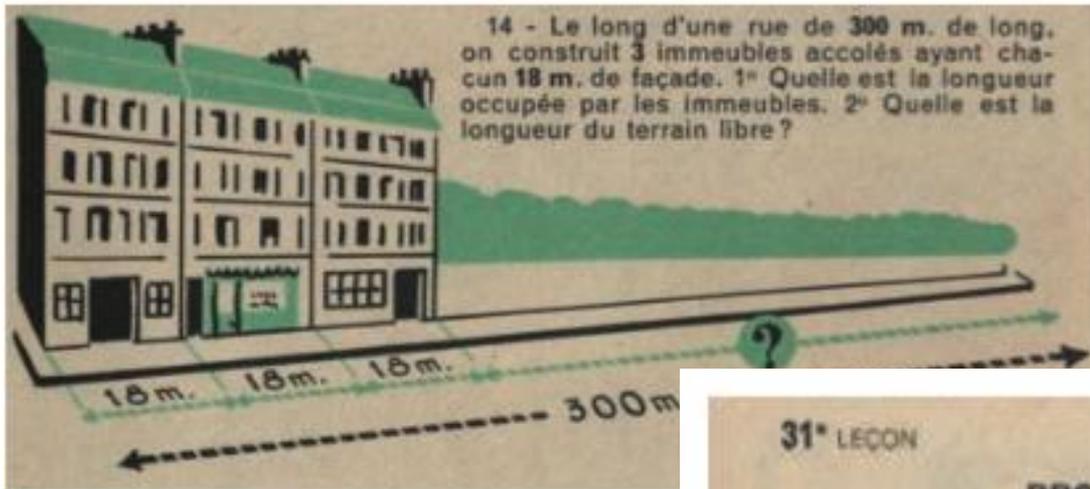
Préconisations de l'institution

Représenter, modéliser

- Développer la compétence « représenter » : faire des schémas pour aider à la résolution de problèmes
- Ne pas tout attendre des élèves
- Fournir des schémas simples, les mêmes sur plusieurs années : sens de « modéliser »
- Soumettre des problèmes nombreux et variés
- Résoudre des problèmes à chaque séance, séquence sous différentes formes (calcul mental...)

Bulletin officiel spécial n° 3 du 26 avril 2018

Représenter : le modèle en barres



31^e LEÇON ARITHMÉTIQUE

PROBLÈMES D'ADDITION

Augmentation

Augmentation - L'addition peut servir à calculer un prix, une longueur, un poids ... après une **augmentation**.

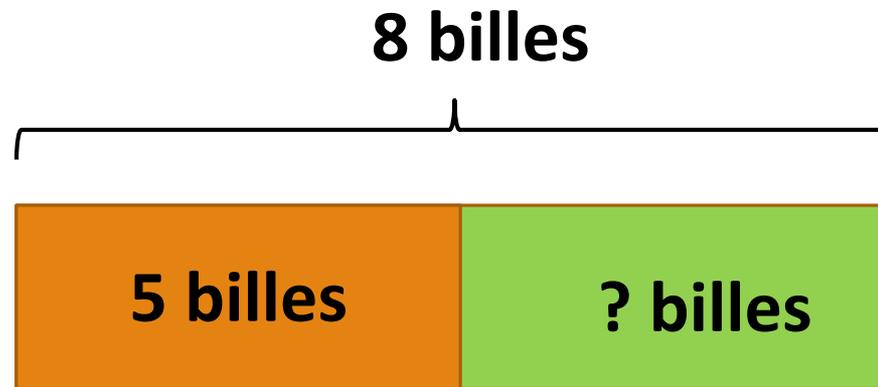
Exemple : Le vin coûtait 58 fr. le litre, il augmente de 16 fr. par litre ; il coûtera maintenant :

$$58 \text{ fr.} + 16 \text{ fr.} = 74 \text{ fr. le litre.}$$

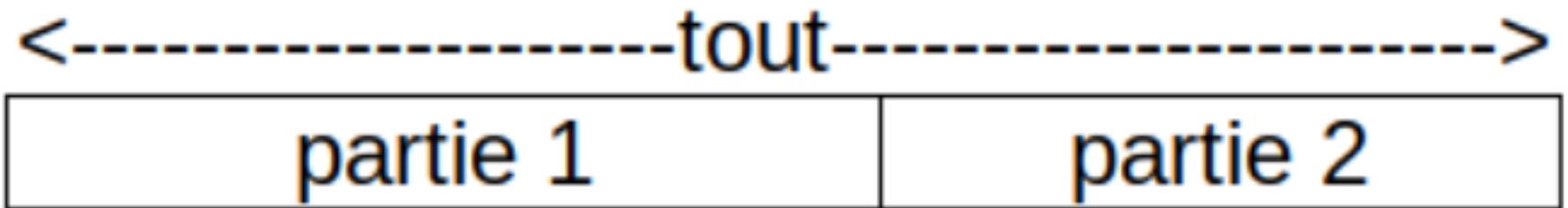
The bar chart shows a horizontal bar divided into two sections. The left section is labeled 'ANCIEN PRIX 58^{fr}' and the right section is labeled 'Augmentation 16^{fr}'. Below the bar, a double-headed arrow spans the entire length and is labeled 'NOUVEAU PRIX 74^{fr}'.

Nouveau prix = ancien prix + augmentation.

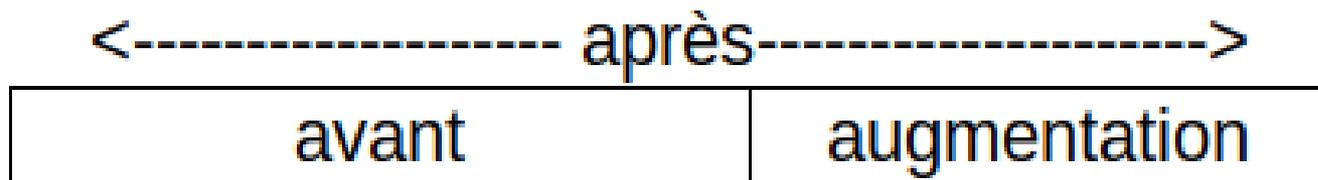
Rédiger au moins deux énoncés différents qui se modélisent par le schéma.



Les modèles partie-tout



Représentation des problèmes avant-après en partie-tout



- Analysez le problème et proposez un schéma.
- Envisagez des aides possibles.

Dans un train, il y a 25 passagers dans le premier wagon, 32 passagers dans le deuxième wagon et 18 dans le 3^{ème} wagon. Combien y a t-t-il de passagers au total dans ce train ?

Attendus de fin de CP

Problème partie-tout : recherche du tout



25	32	18
----	----	----

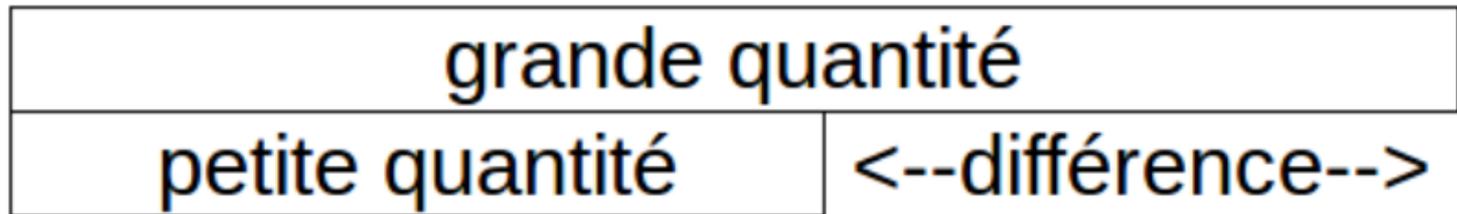
Questions possibles :

Y a-t-il des parties ?

Y a-t-il un tout ?

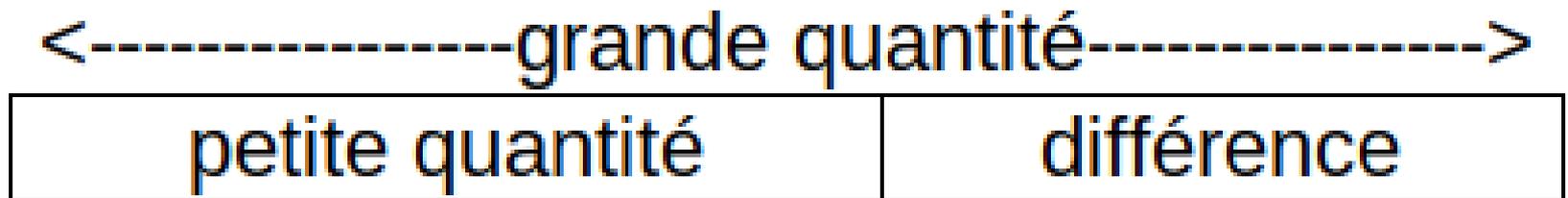
Qu'est-ce que je cherche ?

Les modèles de comparaison



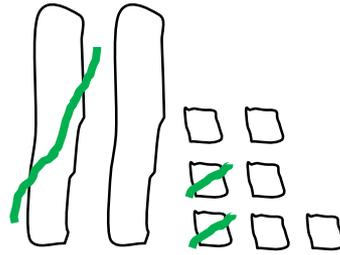
Les modèles de comparaison

Proposez un énoncé en rapport à ce modèle:

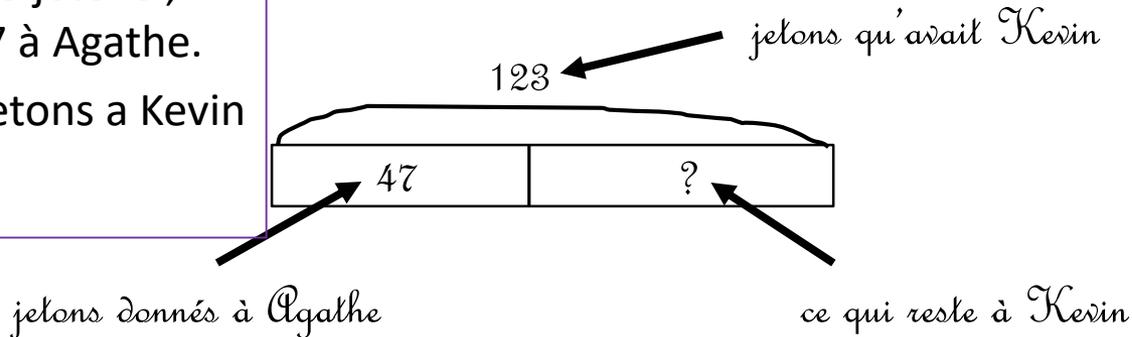


Progressivité du CP au CM2

Kevin avait 27 jetons ; il en a donné 12 à Agathe.
Combien de jetons a Kevin maintenant ?



Kevin avait 123 jetons ; il en a donné 47 à Agathe.
Combien de jetons a Kevin maintenant ?



- Analysez le problème et proposez un schéma.
- Envisagez des aides possibles.

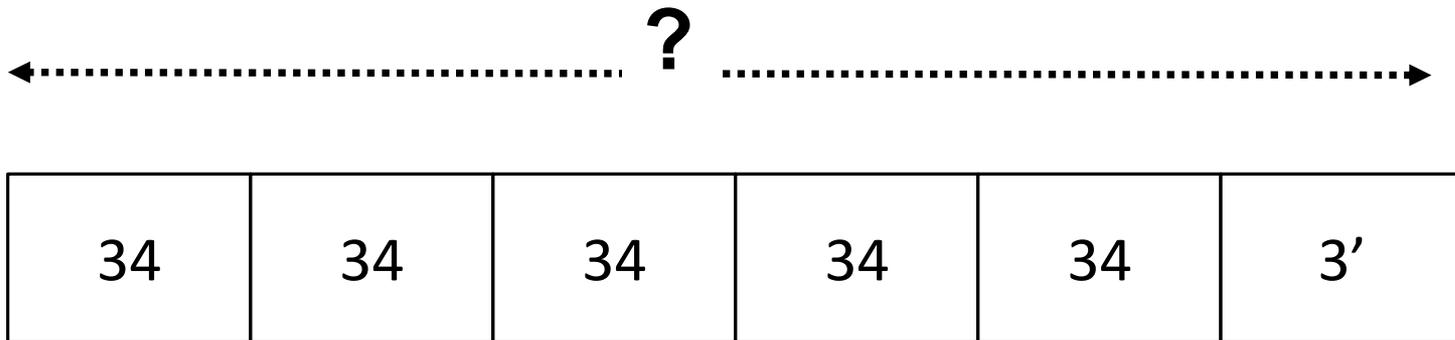
Il y a 24 élèves dans la classe. Pour participer à des rencontres sportives, le professeur constitue des équipes de 4 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?

3 enfants se partagent 18 images. Combien d'images aura chaque enfant ?

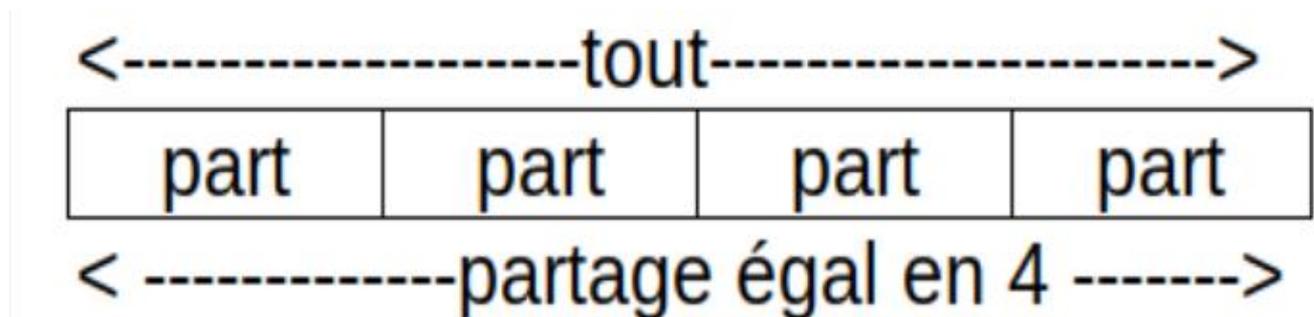
Modèles pour la multiplication et la division

Recherche du tout

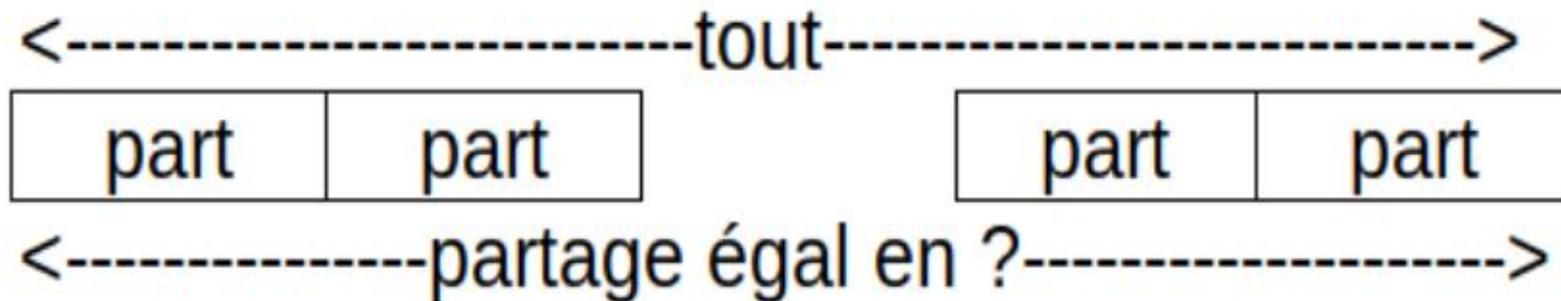
Martin a fabriqué 6 colliers avec 34 perles chacun. Combien Martin a-t-il utilisé de perles ?



Modèles pour la multiplication et la division



Si le nombre de parts est inconnu



PRENEZ UNE BANDE DE PAPIER

Problèmes à résoudre avec un schéma en barres

Problème A

Léo a dépensé $\frac{1}{4}$ de son argent de poche pour acheter un jeu et $\frac{1}{8}$ pour acheter un livre. Il a dépensé 60 € en tout.

Combien avait-il d'argent de poche au départ ?

Problème B

Lilou dépense les $\frac{3}{5}$ de son argent de poche pour acheter un livre. Elle donne les $\frac{3}{4}$ de ce qui lui reste pour rembourser son frère. Maintenant elle n'a plus que 5€.

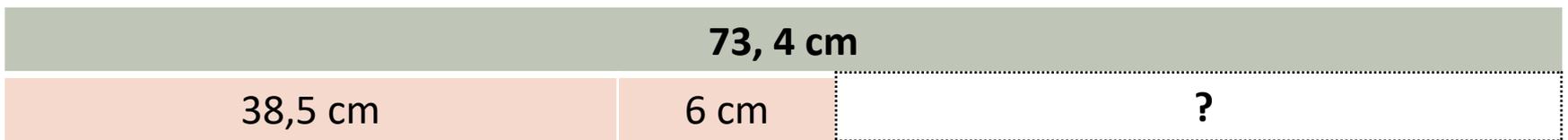
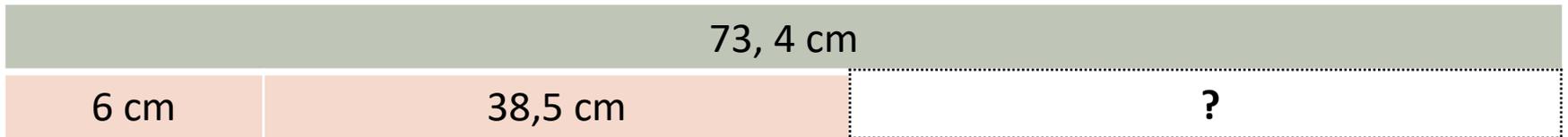
Quelle somme d'argent avait-elle au départ ?

Dans les repères de progressivité

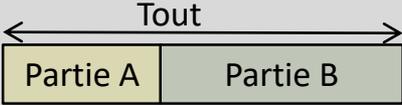
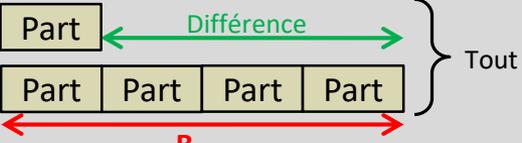
Éric possède un paquet de 126 bonbons. Il donne deux tiers du paquet à 6 amis qui se les partageront. Combien de bonbons aura chacun des amis d'Éric ?

Attendus de fin de CM1

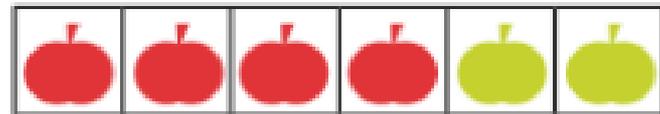
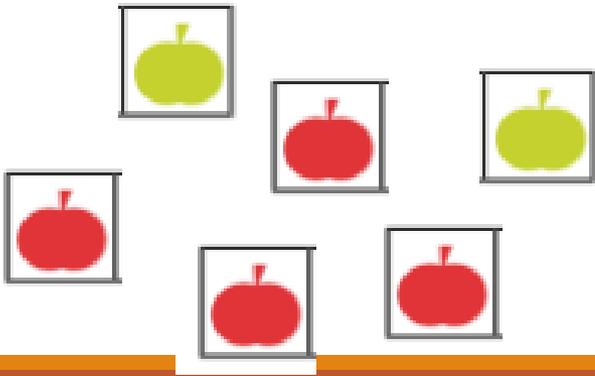
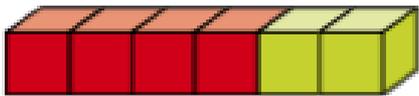
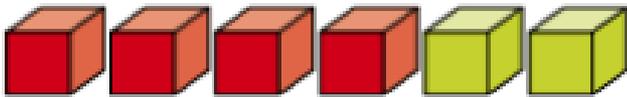
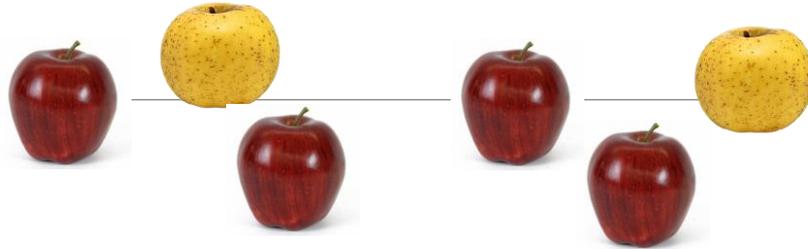
Quels énoncés pour ces schémas?



Représenter : le modèle en barres

Schéma...	... représentant le tout et les parties...	...de comparaison...
...pour l'addition et la soustraction	<p>Partie-Partie-Tout</p>  <p>Tout = Partie A + Partie B Partie B = Tout – Partie A</p>	<p>Partie-Partie-Tout et Comparaison</p>  <p>Différence = A – B A = Différence + B Tout = A + B</p>
...pour la multiplication et la division	<p>Parts égales d'un tout</p>  <p>Tout = Nombre de parts × Part Part = Tout : Nombre de parts Nombre de parts = Tout : Part</p>	<p>Parts égales d'un tout et comparaison</p>  <p>B = Nombre de parts dans B × Part Différence = B – Part Tout = (1 + Nombres de parts dans B) × Part</p>

Représenter : concret, visuel, abstrait



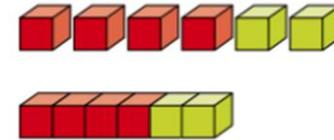
$$4 + 2 = 6$$

Manipuler, verbaliser, abstraire

Le modèle de Bruner



Mode enactif ou
sensori-moteur

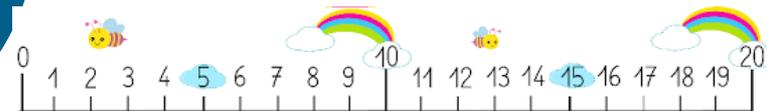


Mode
iconique



Mode
symbolique

$$4 + 2 = 6$$



La compétence « Représenter »

Pour parvenir à un raisonnement mathématique solide et durable, l'habileté à percevoir et représenter la structure mathématique du problème est essentielle.

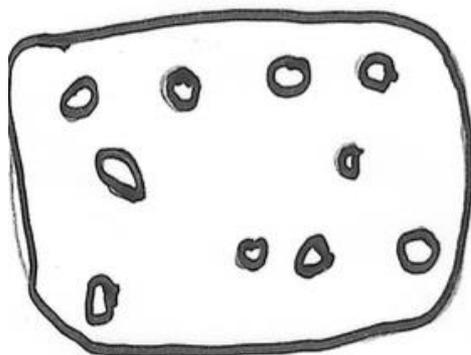
L'utilisation d'un schéma permet une vision globale du problème et facilite le développement d'un raisonnement flexible.

L'utilisation d'un schéma permet de représenter la relation entre les quantités en jeu.

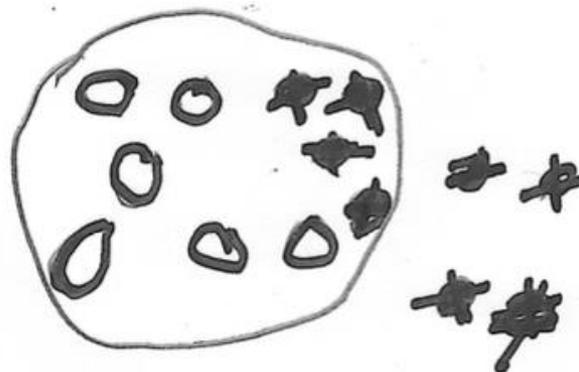
Les compétences « modéliser » et « calculer »

Léo a 24 € dans son porte-monnaie. Il a 8 € de plus que Lilou.
Combien d'euros Lilou a-t-elle ?

MODÉLISER



CALCULER



$$24 - 8 = 16$$

Les compétences « modéliser » et « calculer »

Léo a 24 € dans son porte-monnaie. Il a 8 € de plus que Lilou.
Combien d'euros Lilou a-t-elle ?

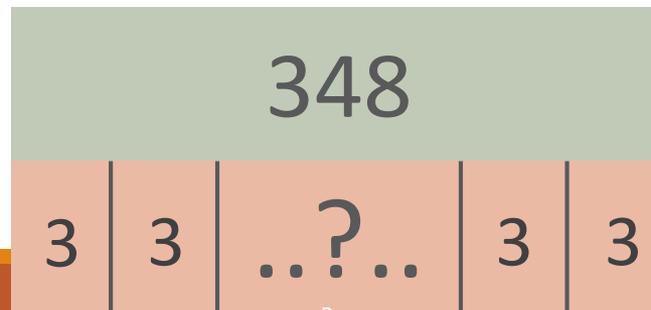
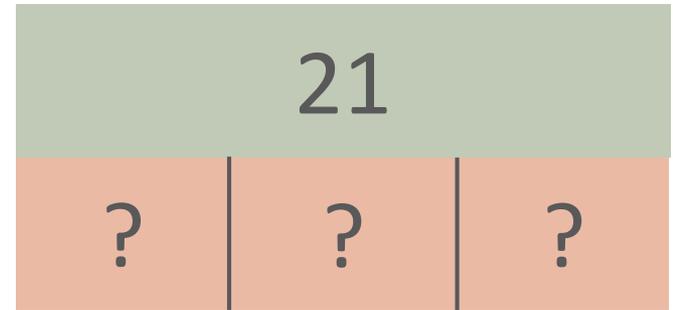
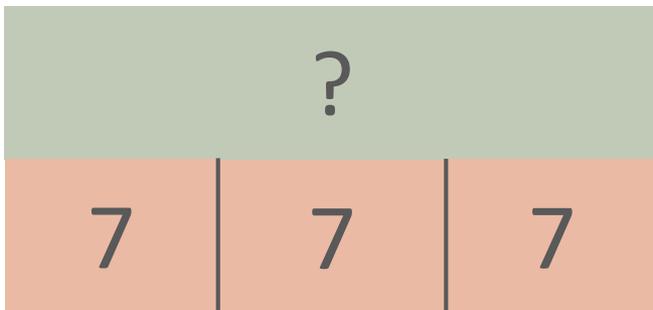
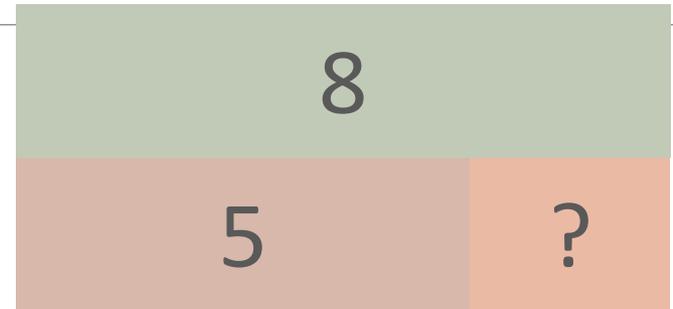
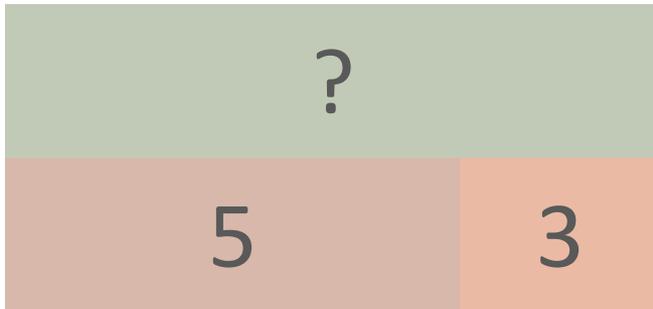
MODÉLISER

CALCULER

$$24 + 8 = 32$$

Modèle en barres

les schémas de base



Règles relatives à la construction des schémas

Modèles Partie-Tout :

- Les rectangles sont remplis par les quantités connues ou par un « ? » si la quantité est inconnue.
- La longueur de la barre rectangle n'a pas à être proportionnelle à la quantité qu'elle contient.
- Il est préférable de représenter la plus petite quantité par une barre plus courte sans que cette préférence soit obligatoire : la représentation n'a pas à être précise ; elle doit être simplement suggestive (suggérer les relations mathématiques : tout = partie 1 + partie 2)

Règles relatives à la construction des schémas

Modèles Comparaison absolue :

- La grande quantité est représentée par un grand rectangle et la petite par un petit rectangle (ce qui suppose qu'on arrive à repérer ces deux quantités)
- La différence entre les deux quantités est représentée par un rectangle (éventuellement en pointillés)
- Les rectangles sont remplis par les quantités connues ou par un « ? » si la quantité est inconnue.
- Comme précédemment, la longueur des barres n'est pas obligatoirement proportionnelle à la quantité représentée.

Règles relatives à la construction des schémas

Modèles de la Multiplication et la Division :

- Les parts égales sont représentées par des rectangles de même longueur
- Quand le nombre de parts est connu, sa représentation est implicite, il suffit de compter le nombre de parts sur le dessin. Dans la ligne, sous le rectangle, le nombre de parts est explicité.
- Quand le nombre de parts est inconnu, mettre un point d'interrogation pour signaler que ce nombre de parts est inconnu.

Quand toute une école s'y met

Expérimentation

Ecole Victor Hugo La
Madeleine du CP au CM2



Des étapes structurées

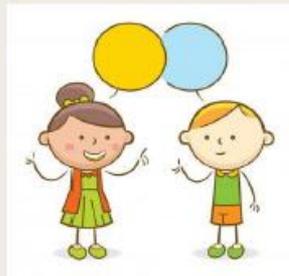


Mme MINON veut compléter la collection de livres de la BCD.



Mme MINON veut compléter la collection de livres de la BCD.

Elle compte actuellement 329 ouvrages.



Mme MINON veut compléter la collection de livres de la BCD.

Elle compte actuellement 329 ouvrages.

Mme MINON achète 156 nouveaux livres.





329	156

329	156



Mme MINON veut compléter la collection de livres de la BCD.

Elle compte actuellement 329 ouvrages.

Mme MINON achète 156 nouveaux livres.

Quel est le nombre de livres maintenant ?



Je recherche un tout

?	
329	156

STRATEGIE



Ce qu'on a su faire

Ce qui a été difficile

CP

J3/12

le tout \searrow

10	10
4	6

une partie

l'autre partie \nearrow

on a cherché

$$4 + \dots = 10$$

on a trouvé:

$$4 + 6 = 10$$
$$4 + 6 = 10$$
$$6 + 4 = 10$$
$$10 - 6 = 4$$

10	
4	6

10	
4	6

le tout

STRATEGIES

CM1

Problème

5376
-1437
3939

$5376 - 1437 = 3939$

Ils ont vendut l'épave midi 3939 tournaise

Jendredi 26 Novembre

162
136
26

Au bois de Boulogne, il y a 162 arbres.
Ce sont soit des chênes soit des hêtres.
Les jardiniers ont compté 26 hêtres.
Combien y a-t'il de chênes ?

$162 - 26 = 136$

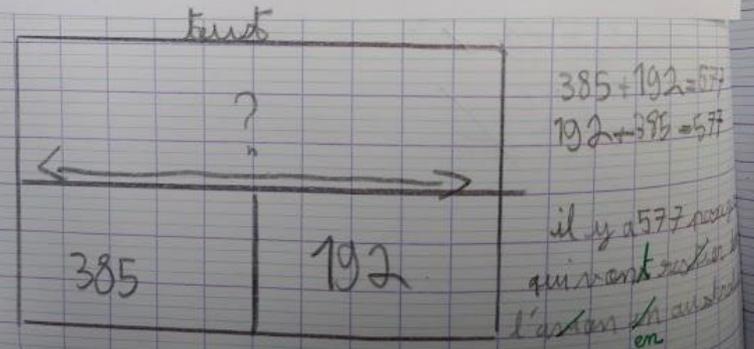
La partie est 1

CM2

Dans l'avion qui va en Australie, au départ de Paris, il y a 385 passagers.

Après quelques heures de vol, le commandant de bord se pose à Hong Kong et ce sont 192 personnes qui montent encore dans l'appareil.

Combien de passagers vont aller jusqu'en Australie ?



9

cout		
539		
partis	Autre partis	Autre partis
127	153	?280 ✓

$$127 + 153 = 280$$

$$127 + 153 + ? = 539$$

$$157 + 127 + ? = 539$$

$$127 + ? + 153 = 539$$

$$539 - 280 = 259$$

CM2

Problèmes à résoudre

A toi de résoudre ces problèmes comme on l'a appris en classe.

Attention, il y a des problèmes où tu dois rechercher un tout et d'autre une partie d'un tout.
Aide-toi des affiches ou de ton cahier outils maths.

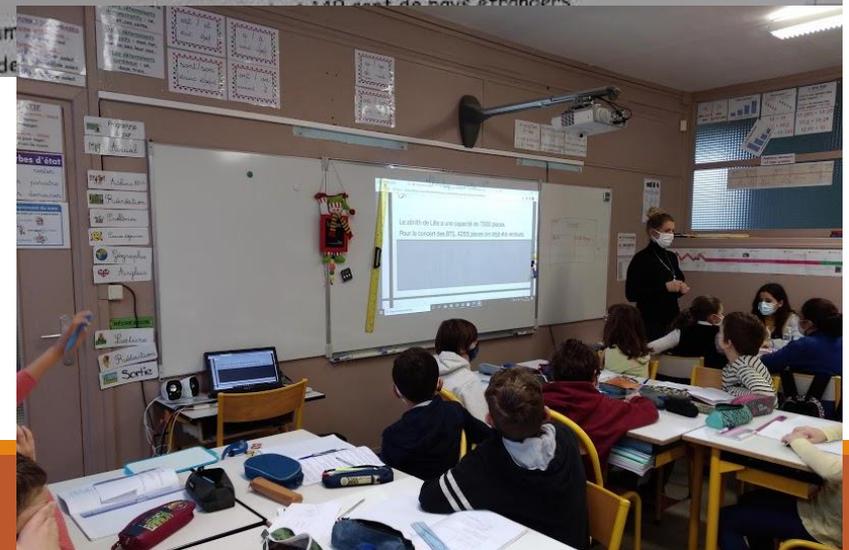
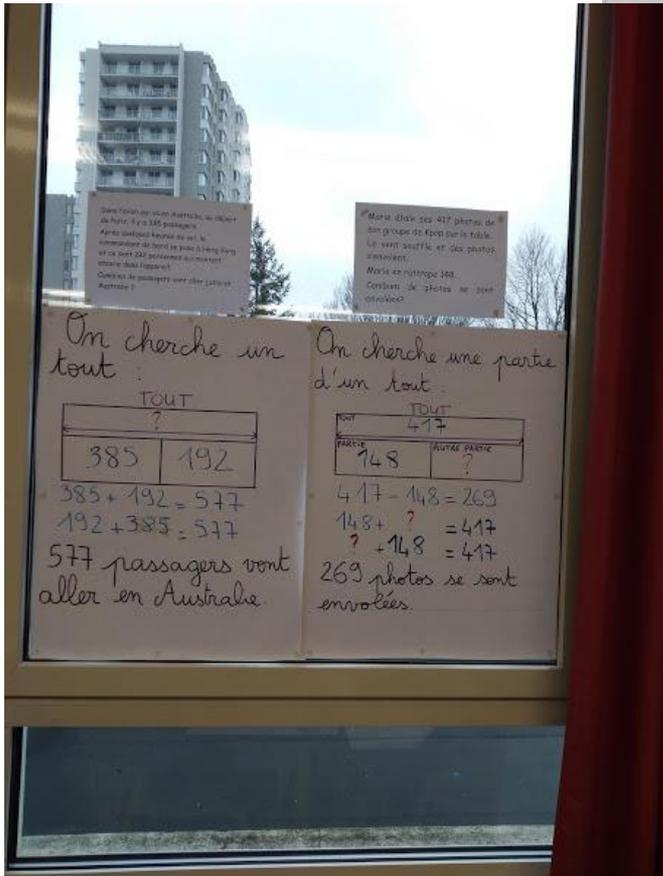
Problème 1 : La directrice de l'école veut compléter la collection de livres de la BCD.
Elle compte actuellement 329 ouvrages. La directrice achète 156 nouveaux livres.
Quel est le nombre de livres maintenant ?

Problème 2 : Dans une école de la banlieue lyonnaise, il y a 153 élèves.
Cette année, l'école a décidé d'avoir 2 défis : le défi recyclage et le défi citoyenneté. Chaque élève doit choisir un défi.
On sait que 92 élèves ont choisi le défi recyclage.
Combien d'élèves ont choisi le défi citoyenneté ?

Problème 3 : Il y avait 158 enfants dans le groupe scolaire à la rentrée des classes. Avant les vacances de Noël, 46 enfants supplémentaires se sont inscrits.
Combien, l'école compte-t-elle d'élèves aujourd'hui ?

Problème 4 : Le matin, mon chien mange 260 g de croquettes. Le soir, on lui donne encore 220g.
Quelle quantité de croquettes mange-t-il quotidiennement ?

Problème 5 : Dans son album
Combien Juliette a-t-elle de

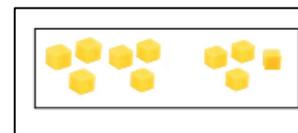


Quel travail en maternelle, en début de CP ?

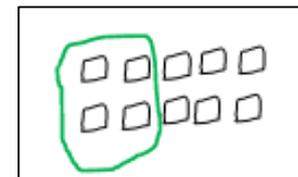
Des objets tangibles, proches de la réalité, manipulables, déplaçables



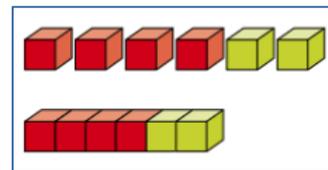
Aux objets décontextualisés : cubes, jetons



Vers des représentations dessinées calculables



Vers des objets décontextualisés ordonnés



La représentation en barres

du côté des élèves

De manière non exhaustive

- Une représentation stable (donc rassurante) de la maternelle au collège pour le travail sur les compétences
- Des liens forts avec la construction du nombre, la numération et le calcul
- Une entrée progressive dans la communication écrite vers les représentations symboliques
- Des modèles basiques simplifiés (par rapport aux autres représentations) aux modèles complexes
- Une représentation adaptée au calcul avec des fractions, au rapport de proportionnalité
- Une transition douce vers l'algèbre et la notion de variable en programmation